М. С. Никольский, Об управляемых вариантах модели Л. Ричардсона в политологии, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2011, том 17, номер 1, 121–128

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 1 2011

УДК 517.977

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ВАРИАНТАХ МОДЕЛИ Л. РИЧАРДСОНА В ПОЛИТОЛОГИИ[1]

М. С. Никольский

Статья посвящена изучению свойств оптимальных управлений для двух управляемых вариантов известной в политологии модели вооружения двух государств, принадлежащей Л. Ричардсону. Основной аппарат исследования — принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Ключевые слова: линейные системы, оптимальное управление.

M. S. Nikol'skii. On controllable variants of the Richardson model in political science.

The paper is devoted to studying the properties of optimal controls for two variants of the Richardson arms race model known in political science. The main investigation technique is Pontryagin's maximum principle.

Keywords: linear systems, optimal control.

1. Линейная нестационарная управляемая модель

В теории моделирования конфликтных ситуаций (см., например, [1–5]) большой популярностью пользуется математическая модель вооружений двух государств Л. Ричардсона (см. [6]). Об истории изучения и применении этой модели см., например, в [3].

В [7] были изучены два варианта управляемой модели Л. Ричардсона. В настоящей работе мы продолжаем это исследование, считая соответствующие управляемые системы нестационарными.

При постановке и анализе оптимизационных задач мы будем использовать стандартные понятия, термины и обозначения математической теории оптимального управления (см., например, [8–10]).

Рассматривается двумерная линейная управляемая модель вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)x_2 - b(t)x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - d(t)x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ определены, положительны и непрерывны при $t \geqslant 0$, на скалярное управление u наложено ограничение

$$u \in U = [0, p], \tag{2}$$

где число $p > 0$. Величина $x_1(t)$ отражает оборонные расходы 1-го государства, произведенные им к текущему моменту $t \geqslant 0$ и выраженные в деньгах. Величина $x_2(t)$ отражает оборонные расходы 2-го государства, произведенные им к текущему моменту $t \geqslant 0$ и выраженные в деньгах. Коэффициент $a(t) > 0$ трактуется как выбираемый и фиксируемый 1-м государством коэффициент пропорциональности относительно расходов $x_2(t)$. Соответственно коэффициент $c(t) > 0$ трактуется как выбираемый и фиксируемый 2-м государством коэффициент пропорциональности относительно расходов на оборону 1-го государства. Функции $b(t) > 0$, $d(t) > 0$ можно интерпретировать как коэффициенты амортизации, связанные со старением и износом

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

вооружений. Измеримое по Лебегу управление $u = u(t) \in [0, p]$, $t \geqslant 0$, моделирует дополнительные инвестиции первого государства в свою оборону. Начальные состояния $x_1(0) = x_{10} \geqslant 0$, $x_2(0) = x_{20} \geqslant 0$ для обоих государств считаются фиксированными. Также фиксированы желаемые конечные (терминальные) состояния $x_1(t_1) = m_1 \geqslant 0$, $x_2(t_1) = m_2 \geqslant 0$.

Двумерные векторы вида $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, где z_i — действительные числа, можно рассматривать как элементы арифметического евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением и длиной вектора $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Символом $\mathbb{R}^1$ будем обозначать множество действительных чисел.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что рассматриваемая управляемая модель (1) необязательно связана с прямым противодействием обоих государств в оборонной политике. Она может отражать и такую ситуацию, когда первое государство стремится обезопасить себя в будущем.

В дальнейшем предполагается, что $x_0 \neq m$, где

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ставится задача о вычислении оптимального по быстродействию управления $\tilde{u}(t) \in [0, p]$, $t \in [0, \tau]$, которое за минимальное время $\tau > 0$ в классе измеримых управлений переводит управляемую систему (1) из начального состояния x_0 в терминальную точку m (см. (3)).

При изучении управляемой системы (1) оказывается полезной формула Коши

$$x(t, u(\cdot)) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, s)gu(s)\, ds, \tag{4}$$

где $\Phi(t, s)$ обозначает матрицу Коши (см. [11]) для матричной функции

$$A(t) = \begin{pmatrix} -b(t) & a(t) \\ c(t) & -d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что матричная функция $\Phi(t, s)$ при $t \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ удовлетворяет по t матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X$$

и начальному условию $\Phi(s, s) = E$ — единичной матрице порядка 2.

Формула (4) описывает решение системы уравнений (1) $x(t, u(\cdot))$ с начальным условием $x(0) = x_0$ при произвольном измеримом управлении $u = u(t) \in [0, p]$, $t \geqslant 0$. Интеграл в формуле (4) понимается в смысле Лебега.

Для приложений важной является следующая

Лемма 1. *При* $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $d(t) > 0$, *где* $t \geqslant 0$, *элементы матричной функции* $\Phi(t, s)$ *при* $0 \leqslant s \leqslant t$ *неотрицательны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (см. (5)) при $t \geqslant 0$

$$\dot{y} = A(t)y$$

с начальным условием $y(s) = y_0$, где $s \geqslant 0$ и компоненты вектора y_0 неотрицательны. Хорошо известно, что решение такой задачи Коши записывается в виде

$$y(t) = \Phi(t, s)y_0. \tag{6}$$

Используя известную формулу Коши для решения одномерного линейного неоднородного дифференциального уравнения, с помощью (5) получаем следующие интегральные уравнения для компонент $y_1(t)$, $y_2(t)$ векторной функции $y(t)$:

$$y_1(t) = \alpha(t,s)y_{01} + \int\limits_s^t \alpha(t,r)a(r)y_2(r)\,dr, \tag{7}$$

$$y_2(t) = \beta(t,s)y_{02} + \int\limits_s^t \beta(t,r)c(r)y_1(r)\,dr, \tag{8}$$

где

$$\alpha(t,s) = \exp\biggl(-\int\limits_s^t b(r)\,dr\biggr), \qquad \beta(t,s) = \exp\biggl(-\int\limits_s^t d(r)\,dr\biggr). \tag{9}$$

Здесь полагается $\exp(\theta) = e^\theta$ при $\theta \in \mathbb{R}^1$. Далее, используя неотрицательность чисел y_{0i} и положительность функций $a(t)$, $c(t)$ при $t \geqslant 0$, методом последовательных приближений для системы интегральных уравнений (7), (8) на произвольном фиксированном отрезке $[0,T]$, $T > 0$, можно обосновать, что

$$y_1(t) \geqslant 0, \qquad y_2(t) \geqslant 0 \qquad \text{при} \qquad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Учитывая формулы (6), (10) и произвольность чисел $y_{01} \geqslant 0$, $y_{02} \geqslant 0$, получаем утверждение леммы 1.

Из леммы 1 и формул (2), (4) вытекают важные для нас неравенства

$$x_1(t,u(\cdot)) \geqslant 0, \qquad x_2(t,u(\cdot)) \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0 \tag{11}$$

при произвольном допустимом управлении $u(t)$, $t \geqslant 0$. Таким образом, требуемые по экономическому смыслу неравенства (11) выполняются при наших исходных предположениях автоматически при произвольном допустимом управлении $u(t)$, $t \geqslant 0$.

Прежде чем изучать искомое оптимальное управление, отметим, что для фиксированных векторов x_0, m, вообще говоря, может не существовать допустимого управления, определенного на некотором отрезке $[0,t_1]$, которое по соответствующей траектории $x(t)$, $t \in [0,t_1]$ системы (1) "соединяет" начальное состояние x_0 с терминальной точкой m, т. е.

$$x(0) = x_0, \qquad x(t_1) = m. \tag{12}$$

С помощью выпуклого анализа аналогично лекции 8 из [10] можно выписать эффективные условия для возможности такого "соединения" на произвольном отрезке $[0,t_1]$, где $t_1 > 0$.

Допустим, что с помощью тех или иных средств установлено существование допустимого управления $\hat{u}(t)$, $t \in [0,t_1]$, "соединяющего" начальную точку x_0 управляемой системы (1) с терминальной точкой m, тогда для соответствующего решения $\hat{x}(t) = x(t,\hat{u}(\cdot))$ выполнены равенства (12). Согласно результатам главы 3 [9] при сделанных предположениях можно утверждать, что существует измеримое оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0,\tau]$, с временем быстродействия $\tau > 0$. Теперь мы постараемся охарактеризовать оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0,\tau]$, с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [8–10]). Мы будем ссылаться на теорему 18 [9, с. 140].

Рассмотрим сопряженную систему вида (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= b(t)\psi_1 - c(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -a(t)\psi_1 + d(t)\psi_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Согласно принципу максимума для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$, $t \in [0, \tau]$, сопряженной системы (13), что почти всюду на $[0, \tau]$ выполняется следующее условие максимума:

$$\tilde{u}(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{\psi}_1(t)), \tag{14}$$

где $\tilde{\psi}_1(t)$ — первая компонента вектора $\tilde{\psi}(t) \in \mathbb{R}^2$. Из соотношения (14) вытекает важность изучения множества нулей непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Этим вопросом мы и займемся. Отметим, что в общем случае функция $\tilde{\psi}(t)$ неизвестна. Поэтому желательно иметь описание множества нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$, не зависящее от конкретной нетривиальной функции $\tilde{\psi}(t)$.

Обозначим через Γ множество нулей непрерывной функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Нетрудно видеть, что, если $\Gamma \neq \varnothing$, то в Γ существует наименьший элемент $\gamma \in [0, T]$. Допустим, что $\Gamma \neq \varnothing$ и что в Γ помимо элемента γ есть элемент $\gamma_1 \neq \gamma$. Из (13) получаем, что

$$\dot{\tilde{\psi}}_1 = -c(\gamma)\tilde{\psi}_2(\gamma) \tag{15}$$

(если $\gamma = 0$, то в (15) в качестве $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma)$ берется правая производная от $\tilde{\psi}_1(t)$ в точке 0). Так как $|\tilde{\psi}(t)| \neq 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из равенства $\tilde{\psi}_1(\gamma) = 0$ вытекает, что $\tilde{\psi}_2(\gamma) \neq 0$, т. е. (см. (15)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) \neq 0$. Отсюда следует, что при достаточно малых $t - \gamma$, где $t > \gamma$, $\tilde{\psi}_1(t) \neq 0$. Обозначим через γ_2 ближайший к γ и отличный от γ элемент Γ (его существование легко обосновывается).

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\tilde{\psi}_2(\gamma) < 0$. Здесь (см. (15)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) > 0$ и

$$\tilde{\psi}_1(t) > 0 \tag{16}$$

при $t \in (\gamma, \gamma_2)$. Применим известную формулу Коши для решения второго уравнения (13) относительно функции $\psi_2(t)$. С помощью неравенства (16) получаем при $t \in [\gamma, \gamma_2]$, что

$$\tilde{\psi}_2(t) = e^{\mu(t,\gamma)}\tilde{\psi}_2(\gamma) - \int\limits_{\gamma}^{t} e^{\mu(t,r)} a(r)\tilde{\psi}_1(r)\, dr < 0, \tag{17}$$

где $\mu(t, s) = \int_s^t d(r)\, dr$. Далее, применяя известную формулу Коши для решения первого дифференциального уравнения системы (13) относительно неизвестной функции $\psi_1(t)$, получаем при $t \in (\gamma, \gamma_2]$ с помощью соотношения (17), что

$$\tilde{\psi}_1(t) = -\int\limits_{\gamma}^{t} e^{\nu(t,r)} c(r)\tilde{\psi}_2(r)\, dr > 0,$$

где $\nu(t, s) = \int_s^t b(r)\, dr$. Из сказанного получаем, что $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) > 0$, и мы пришли к противоречию с определением величины γ_2.

Случай 2: $\tilde{\psi}_2(\gamma) > 0$.

Здесь, рассуждая по аналогии со случаем 1, получаем, что $\tilde{\psi}_2(t) > 0$ при $t \in [\gamma, \gamma_2]$ и $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) < 0$. Т. е. и здесь мы приходим к противоречию с определением величины γ_2.

Таким образом, от противного доказано, что множество Γ нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ либо пусто, либо одноточечно. Отсюда вытекает (см. (14)), что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ эквивалентно (в смысле Лебега) либо функции, принимающей постоянное значение из двухточечного множества $\{0, p\}$, либо кусочно-постоянному управлению с одной точкой разрыва, принимающему одно из значений $\{0, p\}$. Так как изменение $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, на множестве меры нуль не влияет на оптимальную траекторию $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$, то можно считать, что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ либо постоянно и принимает одно из значений $\{0, p\}$, либо является кусочно-постоянным управлением с одной точкой разрыва и принимает соответственно одно из значений $\{0, p\}$. Полученные факты сильно упрощают практическое нахождение оптимального управления $\tilde{u}(t)$.

2. Билинейная нестационарная управляемая модель

Рассматривается двумерная управляемая система вида (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2 - b(t)x_1, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - d(t)x_2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — положительные и непрерывные функции при $t \geqslant 0$, на скалярное управление u наложено ограничение

$$u \in U = [q, p], \tag{19}$$

где $0 \leqslant q < p$. Смысл величин $x_1(t)$, $x_2(t)$ и функций $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ тот же, что и в линейной модели (1). В билинейной модели (18) управление $u = u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, играет роль коэффициента $a(t)$, который теперь становится управлением с ограничением вида (19). Управления $u(t) \in [q, p]$, $t \geqslant 0$, будем рассматривать в классе измеримых по Лебегу функций. Как и в линейной модели, фиксированы начальное и конечные состояния x_0, m с неотрицательными компонентами x_{01}, x_{02}, m_1, m_2, причем считается, что $x_{02} > 0$, $x_0 \neq m$. Ставится задача о вычислении оптимального по быстродействию управления $\tilde{u}(t) \in [q, p]$, $t \in [0, \tau]$, которое за минимальное время $\tau > 0$ в классе допустимых управлений переводит управляемую систему (18) из начальной точки x_0 в терминальную точку m.

Сначала займемся вопросом о выполнении неравенств

$$x_1(t, u(\cdot)) \geqslant 0, \qquad x_2(t, u(\cdot)) > 0, \tag{20}$$

где $x(t, u(\cdot))$ — решение системы дифференциальных уравнений (18) при произвольном измеримом управлении (см. (19)) $u = u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, и начальном условии $x(0) = x_0$, причем $x_{10} \geqslant 0$, $x_{20} > 0$. Из (18) получаем следующие соотношения (ср. с (7), (9)):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha(t, 0)x_{01} + \int\limits_0^t \alpha(t, r)u(s)x_2(s)\, ds, \\ x_2(t) &= \beta(t, 0)x_{02} + \int\limits_0^t \beta(t, r)c(s)x_1(s)\, ds, \end{aligned} \tag{21}$$

где $x_1(t) = x_1(t, u(\cdot))$, $x_2(t) = x_2(t, u(\cdot))$. Далее используем метод последовательных приближений для нахождения решения $x(t) = x(t, u(\cdot))$ системы интегральных уравнений (21) на произвольном отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Так как $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} > 0$ и $u(s) \in [q, p]$, где $q \geqslant 0$, то теперь нетрудно получить справедливость неравенств (20).

Отметим, что если из начальной точки x_0 терминальная точка m достижима за конечное время, то существует и оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, где $\tau > 0$ — время оптимального быстродействия (см. теоремы существования оптимального управления в [9]). Будем исследовать оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, с помощью принципа максимума. Отметим, что тут приходится ссылаться на более продвинутые формулировки принципа максимума (см., например, [12;13]), так как от коэффициентов $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ в (18) мы требуем только непрерывности по t при $t \geqslant 0$. Отметим, что сопряженная система (ср. с (13)) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= b(t)\psi_1 - c(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\tilde{u}(t)\psi_1 + d(t)\psi_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Из принципа максимума вытекает: для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряженной системы (22), что $|\tilde{\psi}(t)| \neq 0$ на $[0, \tau]$ и почти всюду на этом отрезке

$$\tilde{u}(t)\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)). \tag{23}$$

Так как $\tilde{x}_2(t) > 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из (23) следует, что почти всюду на $[0, \tau]$

$$\tilde{u}(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{\psi}_1(t)). \tag{24}$$

В связи с формулой (24) полезно изучить распределение нулей непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Множество нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ обозначим через Γ. Нетрудно видеть, что, если $\Gamma \neq \varnothing$, то в Γ существует наименьший элемент $\gamma \in [0, T]$. Допустим, что $\Gamma \neq \varnothing$ и что в Γ помимо элемента γ есть элемент $\gamma_1 \neq \gamma$. Из (22) имеем, что

$$\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) = -c(\gamma)\tilde{\psi}_2(\gamma) \tag{25}$$

(если $\gamma = 0$, то в (25) в качестве $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma)$ берется правая производная от $\tilde{\psi}_1(t)$ в точке 0). Так как $|\tilde{\psi}(t)| \neq 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из условия $\tilde{\psi}_1(\gamma) = 0$ вытекает, что $\tilde{\psi}_2(\gamma) \neq 0$, т. е. (см. (25)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) \neq 0$. Отсюда следует, что при достаточно малых $t - \gamma$, где $t > \gamma$, $\tilde{\psi}_1(t) \neq 0$. Обозначим через γ_2 ближайший к γ и отличный от γ нуль функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ (он существует, так как по предположению $\tilde{\psi}_1(\gamma_1) = 0$, где $\gamma_1 \in (\gamma, \tau]$, и $\tilde{\psi}_1(t)$ непрерывная на $[0, \tau]$ функция).

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\tilde{\psi}_2(\gamma) < 0$.

Здесь (см. (25)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) > 0$ и

$$\tilde{\psi}_1(t) > 0 \tag{26}$$

при $t \in (\gamma, \gamma_2)$. Применим известную формулу Коши для решения второго уравнения (22) относительно неизвестной функции $\psi_2(t)$. С помощью неравенства (26) и неравенства $q \geqslant 0$ получаем при $t \in [\gamma, \gamma_2]$, что (ср. с (17))

$$\tilde{\psi}_2(t) = e^{\mu(t,\gamma)}\tilde{\psi}_2(\gamma) - \int\limits_{\gamma}^{t} e^{\mu(t,s)}\tilde{u}(s)\tilde{\psi}_1(s)\,ds < 0, \tag{27}$$

где $\mu(t,s) = \displaystyle\int_s^t d(r)\,dr$. Далее, применяя формулу Коши к первому уравнению системы (22) относительно неизвестной функции $\psi_1(t)$, получаем при $t \in (\gamma, \gamma_2]$ с помощью соотношения (27), что

$$\tilde{\psi}_1(t) = -\int\limits_{\gamma}^{t} e^{\nu(t,s)}c(s)\tilde{\psi}_2(s)\,ds > 0,$$

где $\nu(t,s) = \displaystyle\int_s^t b(r)\,dr$, т. е. $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) > 0$, и мы пришли к противоречию с определением величины γ_2.

С л у ч а й 2: $\tilde{\psi}_2(\gamma) > 0$.

Здесь, рассуждая по аналогии со случаем 1, получаем, что $\tilde{\psi}_2(t) > 0$ при $t \in [\gamma, \gamma_2]$ и $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) < 0$. Здесь мы также приходим к противоречию с определением величины γ_2.

Таким образом, от противного было доказано, что множество нулей Γ функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ либо пусто, либо одноточечно. Отсюда вытекает (см. (24)), что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ эквивалентно (в смысле Лебега) либо функции, принимающей постоянное значение из двухточечного множества $\{q, p\}$, либо кусочно-постоянному управлению с одной точкой разрыва, принимающему соответственно одно из значений $\{q, p\}$. Так как изменение $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, на множестве меры нуль не влияет на оптимальную траекторию $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$, то можно считать, что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ либо постоянно и принимает одно из значений $\{q, p\}$, либо является кусочно-постоянным управлением с одной точкой разрыва и принимает соответственно одно из значений $\{q, p\}$. Полученные факты существенно упрощают практическое нахождение оптимального управления.

В настоящей статье мы рассмотрели случай, когда терминальное множество M состоит из единственной точки m. Если рассмотреть случай, когда терминальное множество состоит более чем из одной точки, то тут появляется возможность использовать условия трансверсальности на концевой вектор $\tilde{\psi}(T)$ (см., например, [12–14]). Эти условия иногда позволяют, например, в линейной модели существенно уменьшить множество "подозрительных" на оптимальность функций $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющих соответственно соотношениям максимума (14), (24). Отметим некоторые возможные в приложениях типы терминального множества M:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \alpha x_2\},$$

где $\alpha > 0$ — заданное число;

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число;

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant x_2 + \delta\},$$

где δ — некоторое заданное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Саати Т. П.** Математические модели конфликтных ситуаций. М.: Сов. радио, 1977. 304 с.
2. **Плотинский Ю. М.** Модели социальных процессов. М.: Логос, 2001. 296 с.
3. **Мангейм Дж., Рич Р. К.** Политология: методы исследования. М.: Мир, 1997. 544 с.
4. **Прасолов А. В.** Математические модели динамики в экономике. СПб.: изд-во С.-Петерб. гос. ун-та экономики и финансов, 2000. 247 с.
5. **Самарский А. А., Михайлов А. П.** Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
6. **Richardson L. F.** Arms and insecurity. Pittsburg: Boxwood, 1960. 249 p.
7. **Никольский М. С.** Некоторые задачи оптимального управления, связанные с моделью Л. Ричардсона гонки вооружений государств // Проблемы динамического управления: сб. тр. Вып. 4. М.: Макс-Пресс, 2009. С.113–123.
8. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1969. 393 с.
9. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
10. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 121 с.
11. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
12. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

13. **Арутюнов А. В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 256 с.
14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт РАН им. В.А. Стеклова
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 04.03.2010